Technische Universität Clausthal
Institut für Mathematik
Dr. Thomas Maxsein

Mathematische Meth. der Informatik
WS 1998/99
Klausuraufgaben

1. Zeigen Sie: Für natürliche Zahlen gilt

$$\sum_{l \le d \le n, d|n} \varphi(n) = n$$

(5 Punkte)

2. Sei $a^{13} \equiv 11 \bmod 100$.
Bestimmen Sie eine natürliche Zahl s, so daß $11^s \equiv a \bmod 100$ gilt, und berechnen Sie die Restklasse von a mod 100 mit Hilfe dieser Beziehung.
(5 Punkte)

3. Auf $\mathbf{R}$ sei eine Relation „$\sim$ " erklärt durch
$x \sim y :\Leftrightarrow \exists n \in \mathbf{N}$ und $\exists m \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$, so daß $nx + my \in \mathbf{Z}$ gilt.

   (a) Zeigen Sie, daß „$\sim$ " eine Äquivalenzrelation auf $\mathbf{R}$ ist.

   (b) Bestimmen Sie die Äquivalenzklassen $K(y) = \{x \in \mathrm{R}: x \sim y$ für $y = 1$ und $y = \sqrt{2}$.
   (5 Punkte)

4. Sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper mit Nullelement 0 und Einselement e . Zu $a \in K$ sei $(-a)$ invers bezüglich „$+$ " und zu $a \neq 0$ sei a^{-1} invers bezüglich „$\cdot$ ".
Auf K seien zwei weitere Verknüpfungen $\oplus, \otimes$ erklärt durch

$$a \oplus b = a + b + e, a \otimes b = a + b + a \cdot b$$

   (a) Zeigen Sie, daß $(K, \oplus, \otimes)$ ein zu $(K, +, \cdot)$ isomorpher Körper ist.

   (b) Bestimmen Sie das neutrale Element 0^* von $(K, \oplus)$ und das zu $a \in K$ bezüglich $\oplus$ inverse Element.

   (c) Bestimmen Sie das neutrale Element e^* von $(K, \otimes)$ und das zu $a \in K \setminus \{0^*\}$ bezüglich $\otimes$ inverse Element.
   (9 Punkte)

5. Bezeichne $R_n[x]$ den $\mathbf{R}$-Vektorraum der Polynome in der Variablen x mit reellen Koeffizienten vom Grad $\le n$ mit den üblichen Rechenoperationen. (Es ist $\dim R_n[x] = n + 1$.) Sei $V = \{f \in R_n[x] : f(0) = 0\}$.

   (a) Zeigen Sie, daß V ein Untervektorraum von $R_n[x]$ ist.

   (b) Bestimmen Sie (mit Beweis) die Dimension von V und eine Basis von V .
   (4 Punkte)

6. Sei $f : C \to C, f(z) = \overline{z}$. Zeigen Sie

   (a) Betrachtet man C als Vektorraum über $\mathbf{R}$, so ist f ein Isomorphismus;

   (b) Faßt man C als Vektorraum über C auf, so ist f nicht linear (kein Homomorphismus)
   (3 Punkte)