Institut für Mathematik
TU Clausthal
apl. Prof. Dr. Knut Petras

Clausthal, den 30.06.99

KLAUSUR ZUR VORLESUNG HÖHERE MATHEMATIK IV

- Die jeweiligen Rechenschritte müssen klar erkennbar sein
- Die jeweilig erreichbaren Punktzahlen sind hinter jeder Teilaufgabe angegeben
- Mit 50 Punkten ist die Klausur bestanden

1. Gegeben ist die Anfangswertaufgabe

   $y' = x + xy$, $y(1) = 1$.
   Berechnen Sie
   (a) mit Hilfe automatischer Differentation einen Schritt des TAYLOR-Verfahrens der
   Ordnung 3 mit Schrittweite $\frac{1}{2}$. (14 Punkte)
   (b) einen Schritt des BUTCHER-LOBATTO-Verfahrens

   $$\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \end{array}$$

   mit Schrittweite 1. (14 Punkte)
   (c) einen Schritt der impliziten BDF dritter Ordnung

   $$\sum_{\mu=0}^{k} a_\mu y_{j+\mu} = h f(x_{j+m}, y_{j+m})$$

   mit $k = m = 2$, $a_0 = \frac{1}{2}$, $a_1 = -2$, $a_2 = \frac{3}{2}$und Schrittweite $\frac{1}{2}$. Dabei sei 2 der verwendete Schätzwert für y bei $x_1 = \frac{3}{2}$. (10 Punkte)
2. Gegeben ist die Anfangswertaufgabe $y'' = y^2 - 2x$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 0$. Welchen Schätzwert für $y'(\frac{3}{2})$ ergibt das verbesserte EULER-Verfahren

   $$k_1 = f(x_j, y_j)$$

   $$k_2 = f\left(x_j + \frac{1}{2}h, y_j + \frac{1}{2}hk_1\right)$$

   $$y_{j+1} = y_j + hk_2$$

   mit Schrittweite $\frac{1}{2}$? (16 Punkte)
3. Bestimmen Sie das BUTCHER-Schema des Kollokationsverfahrens mit $c_1 = 0$ und $c_2 = \frac{2}{3}$. Welche Ordnung hat das Verfahren? (16 Punkte)
4. Geben Sie für die Randwertaufgabe $y'' = y^2$, $y(0) = y(1) = 1$ alle Näherungen für $y\left(\frac{1}{2}\right)$ an, die sich aus dem Differenzenansatz der Vorlesung zu den Punkten $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{2}$ und $x_2 = 1$ ergeben. (10 Punkte)
5. Welche Differentationsformel für die Bestimmung von $u_{xxyy}(x_i, y_j)$ ergibt sich, wenn Sie die entsprechende Ableitung des Interpolationspolynoms

   $$p(x, y) = a + bx + cy + dx^2 + exy + fy^2 + gx^2y + vy^2x + wx^2y^2$$

   zu den Stützstellen $(x_i - h, y_j - k)$, $(x_i - h, y_j)$, $(x_i - h, y_j + k)$, $(x_i, y_j - k)$, (x_i, y_j) , $(x_i, y_j + k)$, $(x_i + h, y_j - k)$, $(x_i + h, y_j)$ und $(x_i + h, y_j + k)$ bilden? (20 Punkte)

6. Gegeben ist die Anfangswertaufgabe $y' = -10y$, $y(0) = -2$. Für welche Schrittweiten h konvergiert die Folge $(y_n)_{n \in IN}$ mit $y_0 = y(0)$ und

$$k_1 = f(x_j, y_j)$$

$$k_2 = f\left(x_j + \frac{3}{4}h, y_j + \frac{3}{8}h\,[k_1 + k_2]\right)$$

$$y_{j+1} = y_j + \frac{1}{3}h\,[k_1 + 2k_2]$$

gegen 0? (20 Punkte)